

## ANÁLISIS DE POBLACIONES VIRTUALES MODIFICADO A PARTIR DE UNA APROXIMACIÓN A LA ECUACIÓN DE CAPTURA PERMITIENDO UNA IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA SENCILLA\*

DANIEL R. HERNÁNDEZ<sup>1</sup> y MANUELA MENDIOLAR

Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo Pesquero (INIDEP), Paseo Victoria Ocampo N° 1, Escollera Norte, B7602HSA - Mar del Plata, Argentina

<sup>1</sup>correo electrónico: danielh@inidep.edu.ar

**RESUMEN.** Se presenta una modificación al Análisis de Poblaciones Virtuales a partir de una aproximación a la ecuación de captura que permite evitar resolver ecuaciones no lineales en el proceso de reconstrucción de cada cohorte. Los errores relativos obtenidos al estimar la tasa instantánea de mortalidad por pesca por edad (máximo y medio en valor absoluto) se mantuvieron inferiores al 1,4% dentro del rango de valores de  $M$  y  $F$  (tasa instantánea de mortalidad natural y tasa instantánea de mortalidad por pesca) considerados ( $0 \leq M \leq 1,2$  y  $0 \leq F \leq 2$ ). El nuevo método puede adaptarse a una situación particular (rango de valores de  $M$  y  $F$ ) resolviendo simplemente un problema de optimización (minimización del valor absoluto del error máximo relativo) que se logra fácilmente utilizando una planilla de cálculo o considerando la aproximación correspondiente a alguno de los dominios que aquí se analizan.

**Palabras clave:** Análisis de Poblaciones Virtuales, tasas de mortalidad, evaluación de recursos.

## VIRTUAL POPULATION ANALYSIS MODIFIED AS A RESULT OF AN APPROXIMATION TO THE CATCH EQUATION THAT ALLOWS A SIMPLE NUMERICAL IMPLEMENTATION

**SUMMARY.** A modification to the Virtual Population Analysis as a result of an approximation to the catch equation that allows to avoid solving nonlinear equations in each cohort reconstruction process is presented. The relative errors obtained when estimating the fishing instantaneous mortality rate per age (maximum and mean in absolute value) remained lower than 1.4% within the  $M$  and  $F$  range values (natural instantaneous mortality rate and fishing instantaneous mortality rate) considered ( $0 \leq M \leq 1.2$  and  $0 \leq F \leq 2$ ). The new method can be adapted to a particular situation ( $M$  and  $F$  range values) by simply solving an optimization problem (minimization of the maximum relative error absolute value) easily achieved using a calculation sheet or considering the approximation corresponding to any of the domains hereby analyzed.

**Key words:** Virtual Population Analysis, mortality rates, stock assessment.

## INTRODUCCIÓN

El Análisis de Poblaciones Virtuales (APV) es un método basado en datos de captura por edad en número ( $C$ ), que permite reconstruir la historia de cada una de las cohortes que componen una población, calculando las abundancias ( $N$ ) y las tasas instantáneas de mortalidad por pesca ( $F$ ) a la que fue sometida la cohorte a lo largo del tiempo (Gulland, 1965). A partir de la tasa instantánea de mortalidad natural ( $M$ ) se reconstruye la cohorte desde la edad mayor, calculando paso a paso las abundancias y las tasas instantáneas de mortalidad por pesca de las edades anteriores. Esto determina la necesidad de resolver muchas ecuaciones no lineales en  $F$ . Por lo tanto, cuando la cantidad de ecuaciones es grande y no se dispone de un algoritmo adecuado el proceso de reconstrucción de las cohortes se vuelve complejo. Para superar esta dificultad se han desarrollado alternativas como el Análisis de Cohortes (AC) de Pope (1972) que permite obtener un error acotado y pequeño, pero que es solo aplicable a un rango limitado de valores de  $M$  y  $F$  ( $0 \leq M < 0,3$  y  $0 \leq F < 1,2$ ). Hernández y Perrotta (2008) extendieron el Análisis de Cohortes de Pope, desarrollando el Análisis de Cohortes Modificado (ACM), logrando ampliar el rango de valores de  $M$  y  $F$ , mejorando inclusive el error de aproximación obtenido por Pope.

El método que se presenta aquí, utiliza un enfoque diferente al que plantea el AC o el ACM, es de hecho una aproximación directa al APV. Es simple, no requiere que se resuelva ninguna ecuación no lineal en el proceso de reconstrucción de cada cohorte y es aplicable a un rango amplio de valores de  $M$  y  $F$  ( $0 \leq M < 1,2$  y  $0 \leq F < 2$ ) que cubre gran parte de las situaciones encontradas en las aplicaciones prácticas, pudiendo ser adaptado a una situación particular de manera sencilla.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Análisis de Poblaciones Virtuales

El APV de Gulland (1965) se basa en las dos expresiones siguientes:

$$N_{i+1} = N_i e^{-(F_i + M_i)} \quad (1)$$

$$C_i = \frac{F_i}{F_i + M_i} [1 - e^{-(F_i + M_i)}] N_i \quad (2)$$

siendo:

$N_i$ : número de individuos de edad  $i$  en la cohorte considerada;

$C_i$ : captura de individuos de edad  $i$  en la cohorte considerada (en número);

$M_i$ : tasa instantánea de mortalidad natural para individuos de edad  $i$  en la cohorte considerada;

$F_i$ : tasa instantánea de mortalidad por pesca para individuos de edad  $i$  en la cohorte considerada.

En esencia este método se basa en la resolución de las ecuaciones no lineales en  $F_i$  de la forma:

$$\frac{C_i}{N_{i+1}} = \frac{F_i}{F_i + M_i} [e^{(F_i + M_i)} - 1] \quad (3)$$

Como de la ecuación anterior no puede obtenerse una expresión analítica explícita para  $F_i$ , debe resolverse numéricamente (utilizando algún proceso iterativo). Notar que se tendrán que resolver para cada cohorte tantas ecuaciones no lineales como edades se consideren.

### Aproximación al Análisis de Poblaciones Virtuales

Sea  $\gamma_{M_i}$  la función que surge de considerar el miembro a la de derecha de la igualdad en la

expresión (3), de donde:

$$\gamma_{M_i}(F_i) = \frac{F_i}{F_i + M_i} [e^{(F_i + M_i)} - 1] \quad (4)$$

La modificación al método de Gulland que se propone se basa en considerar una aproximación a la función  $\gamma_{M_i}(F_i)$  que permite obtener en forma explícita el valor de  $F_i$ , correspondiente a la solución de la ecuación no lineal (3). Concretamente se consideró una función de la forma:

$$\hat{\gamma}_{M_i}(F_i) = a_{M_i}(e^{b_{M_i}F_i^{c_{M_i}}} - 1) \quad (5)$$

donde  $a_{M_i}$ ,  $b_{M_i}$  y  $c_{M_i}$  son números reales positivos (el subíndice  $M_i$  es para indicar que los mismos dependerán del valor de la tasa de mortalidad natural considerada).

El considerar funciones de la forma (5) surge al tener en cuenta las siguientes propiedades de  $\gamma_{M_i}$  dada por la expresión (4):

- A1)  $\gamma_{M_i}(0) = 0$ , para  $M_i$  fijo  $M_i > 0$ .
- A2)  $\gamma_{M_i}(F_i) \rightarrow +\infty$  cuando  $F_i \rightarrow +\infty$  para  $M_i$  fijo.
- A3)  $\gamma'_{M_i}(F_i) > 0$ .

Por su parte, para la función  $\hat{\gamma}_{M_i}$  dada por la expresión (5), se tiene que:

- B1)  $\hat{\gamma}_{M_i}(0) = 0$ , para  $M_i$  fijo  $M_i > 0$ .
- B2)  $\hat{\gamma}_{M_i}(F_i) \rightarrow +\infty$  cuando  $F_i \rightarrow +\infty$  para  $M_i$  fijo.
- B3)  $\hat{\gamma}'_{M_i}(F_i) > 0$  para  $F_i > 0$ .

Para una cohorte o clase anual dada, denominaremos con  $t$  a la última edad de la clase anual para la cual hay datos de captura disponible. Dado un valor de  $F_t$  terminal se calcula el número de individuos  $N_t$  (despejando de la ecuación de captura (2)). Notar que para la reconstrucción de

la cohorte considerada,  $N_t$  será un valor común para el APV y el Análisis de Poblaciones Virtuales Aproximado (APVA). De ahí en más, las tasas instantáneas de mortalidad por pesca calculadas por el APV o el APVA diferirán entre sí al reconstruir cada cohorte hacia atrás y por lo tanto también diferirán las numerosidades por edad.

Las tasas instantáneas de mortalidad por pesca para el APV se calculan en cada paso resolviendo la ecuación no lineal en  $F_i$  dada por (3) y para el APVA se plantea la misma ecuación aproximando  $\gamma_{M_i}$  por  $\hat{\gamma}_{M_i}$ . Si llamamos  $\hat{N}_{i+1}$  al número de individuos de edad  $i + 1$ , calculado por el APVA, se obtiene una solución aproximada explícita a la ecuación (3) correspondiente a la edad  $i$ , a partir de:

$$\hat{F}_i = \left( \frac{1}{b_{M_i}} \ln \left[ \frac{1}{a_{M_i}} \left( \frac{C_i}{\hat{N}_{i+1}} \right) + 1 \right] \right)^{\frac{1}{c_{M_i}}} \quad (6)$$

Y a partir de la ecuación (1) se obtiene:

$$\hat{N}_i = \hat{N}_{i+1} e^{(\hat{F}_i + M_i)} \quad (7)$$

Las ecuaciones (6) y (7) se usan entonces para reconstruir cada cohorte. Este proceso de cálculo puede resumirse de la forma siguiente:

### Procedimiento de cálculo para el Análisis de Poblaciones Virtuales Aproximado

- 1) Dado un valor de  $F_t$  terminal se calcula el número de individuos  $N_t$  de la ecuación de captura (2).
- 2) Con  $C_i$  y  $\hat{N}_{i+1}$  se calcula por (6).
- 3) Con el valor de  $\hat{F}_i$  se procede a calcular  $\hat{N}_i$  por (7).
- 4) El procedimiento 2) y 3) se repite y finaliza con el grupo de edad 1.

### Error de aproximación

Interesa entonces calcular de que forma la aproximación de  $\gamma_{M_i}$  por  $\hat{\gamma}_{M_i}$  repercute en el error

de aproximación de  $N_i$  por  $\hat{N}_i$ . Sea  $\rho$  la función error relativo, de esta forma el error relativo de aproximación de  $N_i$  por  $\hat{N}_i$  viene dado por:

$$\rho(\hat{N}_i, N_i) = \frac{(\hat{N}_i - N_i)}{N_i} \tag{8}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1), y aplicándola recursivamente, se obtiene:

$$N_i = N_t \prod_{j=i}^{t-1} e^{(M_j + F_j)} \tag{9}$$

$$\hat{N}_i = N_t \prod_{j=i}^{t-1} e^{(M_j + \hat{F}_j)} \tag{10}$$

Entonces, de (9) y (10) se obtiene que:

$$\frac{\hat{N}_i}{N_i} = e^{\sum_{j=i}^{t-1} (\hat{F}_j - F_j)}$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \rho(\hat{N}_i, N_i) &= \frac{(\hat{N}_i - N_i)}{N_i} \\ &= \left(\frac{\hat{N}_i}{N_i} - 1\right) \\ &= e^{\sum_{j=i}^{t-1} (\hat{F}_j - F_j)} - 1 \\ &= e^{\sum_{j=i}^{t-1} F_j \rho(\hat{F}_j, F_j)} - 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Ahora bien, como se verá los parámetros  $a_M$ ,  $b_M$  y  $c_M$ , que intervienen en el cálculo de  $\hat{F}_j$ , se determinarán de forma tal que el error relativo

$\rho(\hat{F}_j, F_j)$  sea el menor posible y por lo tanto los términos  $F_j \rho(\hat{F}_j, F_j)$  que intervienen en el segundo miembro de (11) tenderán a ser acotados y pequeños y además eventualmente pueden llegar a cancelarse al tomar diferentes signos.

A los efectos de mostrar la consistencia del comportamiento de  $\rho(\hat{N}_i, N_i)$ , tomando valor absoluto en (11) y teniendo en cuenta, a partir de (6), que  $\hat{F} = 0$  cuando  $F = 0$  se tiene que:

$$\begin{aligned} |\rho(\hat{N}_i, N_i)| &\leq |e^{\sum_{j=i}^{t-1} F_j |\rho(\hat{F}_j, F_j)|} - 1| \\ &\leq |e^{F_{max} (t_{max} - 1) max_j |\rho(\hat{F}_j, F_j)|} - 1| \end{aligned} \tag{12}$$

donde  $t_{max}$  denota la edad máxima y  $F_{max}$  la tasa instantánea de mortalidad por pesca máxima.

Entonces:

$$|\rho(\hat{N}_i, N_i)| \rightarrow 0 \text{ cuando } max_j |\rho(\hat{F}_j, F_j)| \rightarrow 0.$$

### Estimación de los parámetros $a_{M^*}$ , $b_{M^*}$ y $c_{M^*}$

Sea  $\Omega_k = I_k \times [0,2]$ , siendo a su vez  $I_k = [(k - 1)\Delta, k \Delta]$ , con  $\Delta = 0,05^1$ . Dado un valor de  $M^*$  perteneciente al intervalo  $I_k$ , con  $k = [M^*/\Delta] + 1$  (donde en la última expresión  $[\cdot]$  representa la parte entera del número  $M^*/\Delta$ ), se pueden definir los parámetros  $a_{M^*}$ ,  $b_{M^*}$  y  $c_{M^*}$ , como aquellos valores que minimicen el máximo error relativo al aproximar  $F$  por  $\hat{F}$  en  $\Omega_k = I_k \times [0,2]$ , esto es, que minimicen la función:

$$\varphi(a_{M^*}, b_{M^*}, c_{M^*}) = \max_{(M, F) \in \Omega_k} |\rho(\hat{F}, F)| \tag{13}$$

siendo:

$$\hat{F} = \left(\frac{1}{b_{M^*}} \ln \left[ \frac{1}{a_{M^*}} \left(\frac{C_i}{\hat{N}_{i+1}} + 1\right)\right]^{c_{M^*}}\right)$$

donde  $\gamma_M(F)$  viene dada por (4).

<sup>1</sup>El valor 0,05 para la cota del parámetro  $\Delta$  fue determinado a partir de pruebas numéricas exploratorias, eventualmente el usuario puede considerar valores  $\Delta \leq 0,05$ .

Para obtener una aproximación numérica simple para el ajuste y cálculo de los parámetros  $a_{M^*}$ ,  $b_{M^*}$  y  $c_{M^*}$  en el dominio  $\Omega_k$ , se puede construir una grilla  $G(\Omega_k) \subset \Omega_k$ , suficientemente fina, de valores de  $M$  y  $F$  en el dominio considerado  $\Omega_k$  y resolver el problema de optimización planteando la minimización, con respecto a los parámetros mencionados, de la expresión:

$$\varphi_{\Delta}(a_{M^*}, b_{M^*}, c_{M^*}) = \max_{(M, F) \in G(\Omega_k)} |\rho(\hat{F}, F)| \quad (14)$$

En caso de que en una aplicación específica se considere la incertidumbre asociada al conocimiento de la tasa de mortalidad natural  $M^*$  y por lo tanto en el proceso de cálculo se tengan que tener en cuenta diferentes valores de la misma, entonces deberán considerarse los resultados de la Tabla 1 y

Tabla 1. Parámetros  $a_M$ ,  $b_M$  y  $c_M$  de la función  $\hat{\gamma}_M(F)$  en cada uno de los dominios de definición considerados. Índices de correlación  $R^2$  de cada ajuste. Máximo error relativo en valor absoluto y promedio de los errores relativos en valor absoluto en cada dominio.

Table 1.  $a_M$ ,  $b_M$  and  $c_M$  parameters of the  $\hat{\gamma}_M(F)$  function in each of the definition domains considered.  $R^2$  correlation indices of each fit. Maximum relative error in absolute value and average of the relative errors in absolute value in each domain.

Dominio $\Omega_k$	$a_M$	$b_M$	$c_M$	$R^2$	Máximo error relativo (%)	Error relativo medio (%)
$\Omega_1: 0,00 \leq M < 0,05; F \leq 2$	1,009409	1,003186	0,999997	0,99997	0,75	0,29
$\Omega_2: 0,05 \leq M < 0,10; F \leq 2$	1,023583	1,012067	1,000005	0,99993	1,01	0,40
$\Omega_3: 0,10 \leq M < 0,15; F \leq 2$	1,039784	1,021850	0,999994	0,99990	1,02	0,43
$\Omega_4: 0,15 \leq M < 0,20; F \leq 2$	1,062963	1,025515	0,999997	0,99992	1,03	0,41
$\Omega_5: 0,20 \leq M < 0,25; F \leq 2$	1,081676	1,034121	0,999997	0,99990	1,04	0,43
$\Omega_6: 0,25 \leq M < 0,30; F \leq 2$	1,104473	1,039504	1,000000	0,99991	1,04	0,42
$\Omega_7: 0,30 \leq M < 0,35; F \leq 2$	1,127404	1,045494	1,000010	0,99991	1,05	0,42
$\Omega_8: 0,35 \leq M < 0,40; F \leq 2$	1,150986	1,051525	1,000012	0,99991	1,06	0,43
$\Omega_9: 0,40 \leq M < 0,45; F \leq 2$	1,175551	1,057512	1,000036	0,99990	1,07	0,43
$\Omega_{10}: 0,45 \leq M < 0,50; F \leq 2$	1,201406	1,063176	1,000075	0,99990	1,08	0,43
$\Omega_{11}: 0,50 \leq M < 0,55; F \leq 2$	1,228828	1,068325	1,000133	0,99990	1,10	0,43
$\Omega_{12}: 0,55 \leq M < 0,60; F \leq 2$	1,256095	1,074267	1,000177	0,99990	1,11	0,44
$\Omega_{13}: 0,60 \leq M < 0,65; F \leq 2$	1,285168	1,079630	1,000241	0,99990	1,12	0,44
$\Omega_{14}: 0,65 \leq M < 0,70; F \leq 2$	1,315162	1,085015	1,000306	0,99990	1,14	0,45
$\Omega_{15}: 0,70 \leq M < 0,75; F \leq 2$	1,346242	1,090353	1,000375	0,99989	1,16	0,45
$\Omega_{16}: 0,75 \leq M < 0,80; F \leq 2$	1,378418	1,095657	1,000443	0,99989	1,17	0,45
$\Omega_{17}: 0,80 \leq M < 0,85; F \leq 2$	1,411812	1,100888	1,000519	0,99989	1,19	0,46
$\Omega_{18}: 0,85 \leq M < 0,90; F \leq 2$	1,445912	1,106298	1,000554	0,99989	1,21	0,46
$\Omega_{19}: 0,90 \leq M < 0,95; F \leq 2$	1,482206	1,111235	1,000671	0,99988	1,23	0,47
$\Omega_{20}: 0,95 \leq M < 1,00; F \leq 2$	1,519323	1,116338	1,000748	0,99988	1,24	0,47
$\Omega_{21}: 1,00 \leq M < 1,05; F \leq 2$	1,557789	1,121391	1,000827	0,99988	1,26	0,48
$\Omega_{22}: 1,05 \leq M < 1,10; F \leq 2$	1,597649	1,126397	1,000907	0,99988	1,28	0,48
$\Omega_{23}: 1,10 \leq M < 1,15; F \leq 2$	1,638953	1,131358	1,000986	0,99987	1,30	0,49
$\Omega_{24}: 1,15 \leq M < 1,20; F \leq 2$	1,681776	1,136264	1,001067	0,99987	1,32	0,50

utilizar la ecuación (6) con los valores de los parámetros  $a_{M^*}$ ,  $b_{M^*}$  y  $c_{M^*}$  que correspondan al dominio al que pertenezca cada valor de  $M^*$  particular.

Por otra parte, en alguna aplicación se podría estar considerando un valor único y fijo de  $M^*$  y en este caso el usuario podría considerar como dominio  $\Omega_* = \{(M^*, F) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq F \leq 2\}$  y efectuar la estimación de los parámetros  $a_{M^*}$ ,  $b_{M^*}$  y  $c_{M^*}$  de la función  $\hat{\gamma}_{M^*}(F)$  definida en (5) en éste dominio, resolviendo el problema de optimización planteado en (14), utilizando por ejemplo simplemente una planilla de cálculo. Al trabajar en un dominio tan específico (sin variabilidad en  $M^*$ ), el ajuste de  $\hat{\gamma}_M(F)$  a  $\gamma_M(F)$  mejorará considerablemente determinando una disminución en forma ostensible del error de estimación de las  $\hat{F}$ 's en el proceso de reconstrucción de las cohortes y esto redundará en una mejor estimación de las numerosidades por edad.

Por último, el usuario tiene absoluta libertad para adaptar el dominio total de trabajo para su aplicación particular, según su conocimiento y necesidad. De esta forma en caso de considerar  $M^*$  variable puede construir su propia Tabla 1, tomando dominios con la amplitud del intervalo en  $M^*$  y grillado que crea conveniente. Si por otra parte considera el caso en que  $M^*$  sea único y constante, puede definir como dominio de trabajo  $\Omega_* = \{(M^*, F) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq F \leq F_{max}\}$ , con  $F_{max}$  eventualmente menor a 2.

### Ejemplos de aplicación

A los efectos de mostrar en la práctica lo desarrollado teóricamente, se consideraron tres especies: merluza de cola (*Macruronus magellanicus*) (Wöhler *et al.*, 1999); caballa (*Scomber japonicus*) (Perrotta *et al.*, 1990) y anchoíta (*Engraulis anchoíta*) (Hansen *et al.*, 2009). También se ha reconsiderado el ejemplo correspondiente a caballa con un valor único y fijo de tasa instantánea de mortalidad natural (con la estimación de los parámetros  $a_{M^*}$ ,  $b_{M^*}$  y  $c_{M^*}$  en el dominio  $\Omega_* = \{(0,4; F) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq F \leq 2\}$ ).

### Velocidad de procesamiento del APVA en relación al APV, implementados en R

Se implementó una simulación numérica en R versión 3.2.5 (R Development Core Team, 2016), a los efectos de estimar la velocidad relativa de procesamiento del APVA con respecto al APV. La idea es mostrar que, al no tener que resolver ecuaciones no lineales, el APVA es más eficiente, en cuanto al tiempo de procesamiento se refiere, en relación al APV, que sí requiere la resolución de la ecuación no lineal (3) reiteradamente. Para estimar los tiempos de procesamiento se procedió a reconstruir las cohortes correspondientes a las especies consideradas en los ejemplos de aplicación. La reconstrucción de cada cohorte se efectuó 1.000.000 de veces, a partir del APV y del APVA y se evaluaron los tiempos de procesamiento en segundos.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El conjunto de valores de  $M < 1,2$  y  $F \leq 2$  se dividió en 12 dominios de definición, efectuando la estimación de los parámetros  $a_M$ ,  $b_M$  y  $c_M$  de la función  $\hat{\gamma}_M(F)$  en cada uno de ellos. En cada dominio se definió una grilla con  $\Delta M = \Delta F = 0,001$ , dentro de la cual se calculó el máximo error relativo al aproximar  $F$  por  $\hat{F}$  y el correspondiente promedio de los errores relativos en valor absoluto (Tabla 1).

En la Tabla 1 se presentan las estimaciones de los parámetros  $a_M$ ,  $b_M$  y  $c_M$  de la función  $\hat{\gamma}_M(F)$  en cada uno de los dominios considerados. Índices de correlación  $R^2$  de cada ajuste (Ostle, 1979). Máximo error relativo en valor absoluto y promedio de los errores relativos en valor absoluto, en cada dominio.

En la Figura 1 se muestra la distribución acumulativa de los errores relativos porcentuales al aproximar  $F$  por  $\hat{F}$  en los dominios  $\Omega_1$  ( $0 \leq M < 0,05$ ;  $F \leq 2$ ),  $\Omega_8$  ( $0,35 \leq M < 0,40$ ;  $F \leq 2$ ),  $\Omega_{16}$  ( $0,75 \leq M < 0,80$ ;  $F \leq 2$ ) y  $\Omega_{24}$  ( $1,15 \leq M < 1,20$ ;  $F \leq 2$ ).

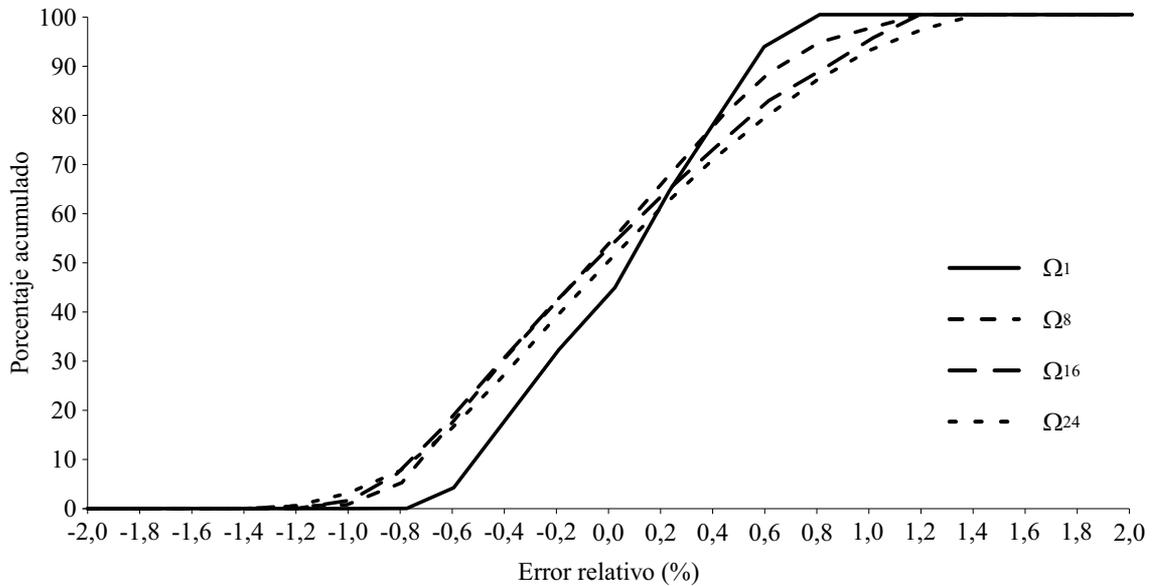


Figura 1. Distribución acumulativa de los errores relativos porcentuales al aproximar  $F$  por  $\hat{F}$  en los dominios  $\Omega_1$  ( $0 \leq M < 0,05$ ;  $F \leq 2$ ),  $\Omega_8$  ( $0,35 \leq M < 0,40$ ;  $F \leq 2$ ),  $\Omega_{16}$  ( $0,75 \leq M < 0,80$ ;  $F \leq 2$ ) y  $\Omega_{24}$  ( $1,15 \leq M < 1,20$ ;  $F \leq 2$ ).  
 Figure 1. Cumulative distribution of the percentage relative errors when approximating  $F$  for  $\hat{F}$  in the  $\Omega_1$  ( $0 \leq M < 0,05$ ;  $F \leq 2$ ),  $\Omega_8$  ( $0,35 \leq M < 0,40$ ;  $F \leq 2$ ),  $\Omega_{16}$  ( $0,75 \leq M < 0,80$ ;  $F \leq 2$ ) and  $\Omega_{24}$  ( $1,15 \leq M < 1,20$ ;  $F \leq 2$ ) domains.

La Figura 2 muestra las gráficas de las funciones  $\gamma_M(F)$  y  $\hat{\gamma}_M(F)$  en los dominios  $\Omega_5$ ,  $\Omega_8$  y  $\Omega_{21}$ , para valores particulares de la tasa de mortalidad natural. Puede apreciarse como los valores de la función  $\gamma_M(F)$  son ajustados en forma satisfactoria por la función  $\hat{\gamma}_M(F)$  en cada caso, y como la bondad de aproximación depende del valor de  $M$  considerado.

En la Tabla 2 se presentan los parámetros  $a_M$ ,  $b_M$  y  $c_M$  estimados de la función  $\hat{\gamma}_M(F)$  cuando  $M$  es un valor único y fijo. Los ocho dominios considerados corresponden a valores de mortalidad natural utilizados en la evaluación de los siguientes recursos pesqueros:  $M = 0,15$  para polaca (*Micromesistius australis*) (Giussi *et al.*, 2015 a),  $M = 0,20$  para abadejo (*Genypterus blacodes*) (Cordo, 2014),  $M = 0,22$  para corvina rubia (*Micropogonias furnieri*) (Carozza *et al.*, 2014),  $M = 0,30$  para merluza (*Merluccius hubbsi*) del efectivo norte de  $41^\circ$  S (Irusta, 2015),  $M = 0,35$  para merluza de cola (*M. magellanicus*) (Giussi *et al.*, 2015 b),  $M = 0,40$  para caballa (*S.*

*japonicus*) (Perrotta *et al.*, 1990),  $M = 0,98$  para anchoíta (*E. anchoita*) del efectivo patagónico (Hansen, 2011) y  $M = 1,01$  correspondiente al efectivo bonaerense de la anchoíta (*E. anchoita*) (Hansen, 2011). Se presentan además los índices de correlación  $R^2$  de cada ajuste, el máximo error relativo en valor absoluto y el promedio de los errores relativos en valor absoluto, en cada dominio.

## Ejemplos de aplicación

### Merluza de cola (*Macruronus magellanicus*)

En la Tabla 3 se muestran los resultados de la cohorte correspondiente a 1985. La Figura 3 muestra el número de individuos por edad a principios del año (en miles de ejemplares) resultante del APV tradicional y el APVA considerando  $M = 0,35$ . Los errores obtenidos por ambos métodos son pequeños, en términos relativos, destacándose ante todo la poca diferencia entre ambos.

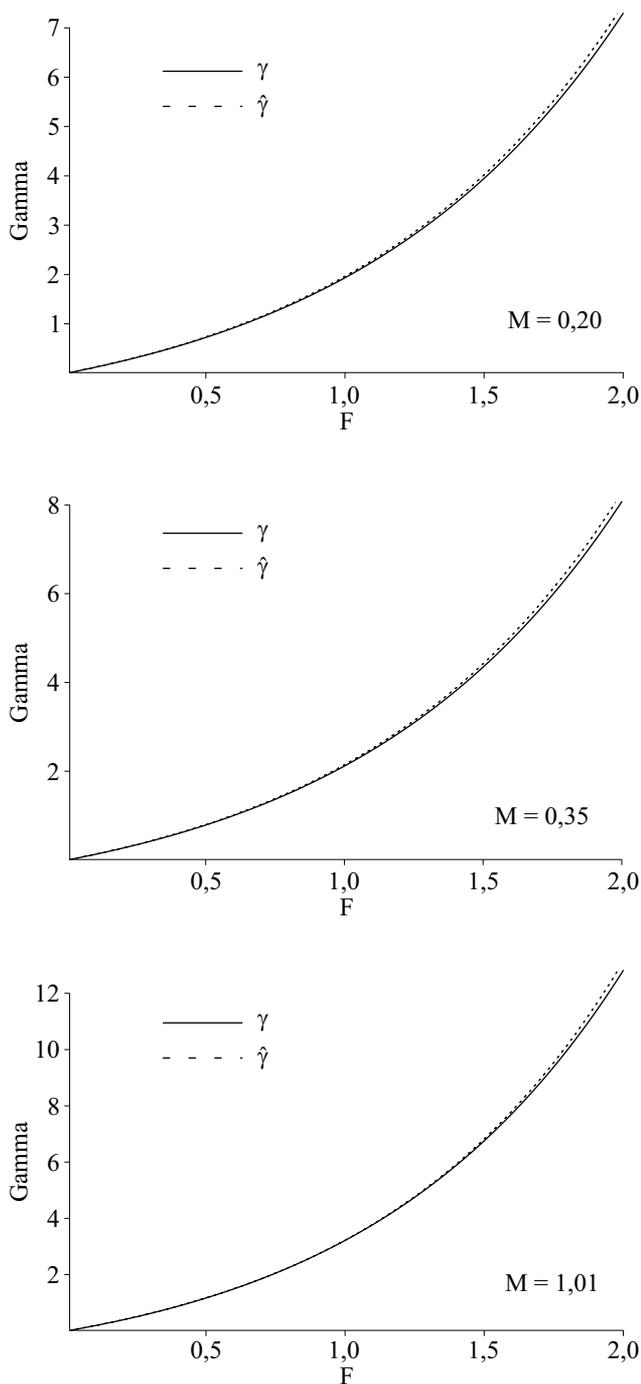


Figura 2. Aproximación de la función  $\gamma_M(F)$  por  $\hat{\gamma}_M(F)$  con los parámetros estimados para los dominios correspondientes que surgen de considerar valores particulares de la tasa de mortalidad natural.

Figure 2. Approximation of the  $\gamma_M(F)$  function for  $\hat{\gamma}_M(F)$  with the parameters estimated for the corresponding domains that arise from considering particular values of the natural mortality rate.

Tabla 2. Parámetros  $a_M$ ,  $b_M$  y  $c_M$  de la función  $\hat{\gamma}_M(F)$  en cada uno de los dominios considerados cuando  $M$  es un valor único y fijo. Índices de correlación  $R^2$  de cada ajuste. Máximo error relativo en valor absoluto y promedio de los errores relativos en valor absoluto en cada dominio.

Table 2.  $a_M$ ,  $b_M$  and  $c_M$  parameters of the  $\hat{\gamma}_M(F)$  function in each of the domains considered when  $M$  is set to a unique and fixed value.  $R^2$  correlation indices of each fit. Maximum relative error in absolute value and average of the relative errors in absolute value in each domain.

Dominio $\Omega^*$	$a_M$	$b_M$	$c_M$	$R^2$	Máximo error relativo (%)	Error relativo medio (%)
$\Omega_1^*$ : $M = 0,15$ ; $F \leq 2$	1,062549	1,016998	1,000299	1,00000	0,05	0,03
$\Omega_2^*$ : $M = 0,20$ ; $F \leq 2$	1,084308	1,022896	1,000318	1,00000	0,07	0,04
$\Omega_3^*$ : $M = 0,22$ ; $F \leq 2$	1,094024	1,024805	1,000441	1,00000	0,07	0,04
$\Omega_4^*$ : $M = 0,30$ ; $F \leq 2$	1,130528	1,034382	1,000418	1,00000	0,10	0,06
$\Omega_5^*$ : $M = 0,35$ ; $F \leq 2$	1,156625	1,039113	1,000708	1,00000	0,11	0,07
$\Omega_6^*$ : $M = 0,40$ ; $F \leq 2$	1,184546	1,044155	1,001138	1,00000	0,20	0,07
$\Omega_7^*$ : $M = 0,98$ ; $F \leq 2$	1,555006	1,104260	1,002049	0,99998	0,32	0,20
$\Omega_8^*$ : $M = 1,01$ ; $F \leq 2$	1,578743	1,107182	1,002113	0,99998	0,33	0,20

Tabla 3. Comparación de los resultados del Análisis de Poblaciones Virtuales (APV) y del Análisis de Poblaciones Virtuales Aproximado (APVA). Merluza de cola (*Macruronus magellanicus*). Clase anual 1985,  $M = 0,35$ . Las tasas de mortalidad por pesca y los errores están redondeados al cuarto decimal.

Table 3. Comparison of the results of the Virtual Population Analysis (APV) and the Approximate Virtual Population Analysis (APVA). Hoki (*Macruronus magellanicus*). 1985 year class,  $M = 0.35$ . The fishing mortality rates and errors are rounded to the fourth decimal.

Edad	Mortalidad por pesca $F_i$			Número de individuos $N_i$		
	APV	APVA	Error relativo (%)	APV	APVA	Error relativo (%)
12	0,0230*	0,0230*		7.605	7.605	
11	0,0272	0,0269	-1,0425	11.089	11.086	-0,0283
10	0,0479	0,0475	-0,9986	16.509	16.497	-0,0762
9	0,0641	0,0635	-0,9404	24.980	24.946	-0,1364
8	0,0849	0,0842	-0,8683	38.591	38.510	-0,2101
7	0,0638	0,0632	-0,8121	58.369	58.216	-0,2617
6	0,0459	0,0455	-0,7740	86.716	86.459	-0,2971
5	0,0275	0,0273	-0,7515	126.485	126.083	-0,3177
4	0,0169	0,0168	-0,7381	182.547	181.944	-0,3301
3	0,0035	0,0035	-0,7333	259.949	259.085	-0,3327
2	0,0012	0,0012	-0,7311	369.316	368.084	-0,3335
1	0,0000	0,0000	-0,7243	524.087	522.339	-0,3335

\*Se asume.

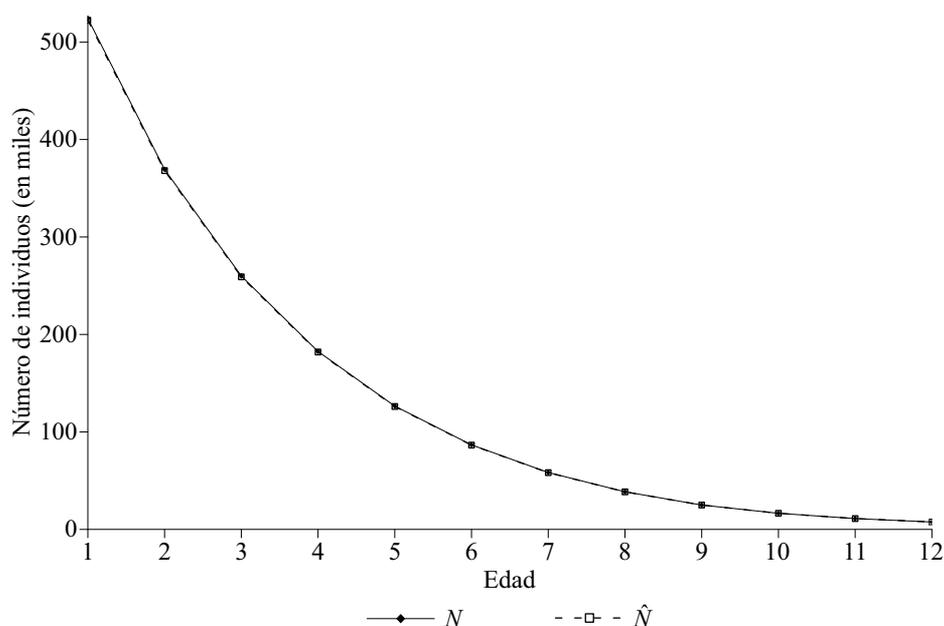


Figura 3. Merluza de cola (*Macruronus magellanicus*). Número de individuos por edad para el Análisis de Poblaciones Virtuales ( $N$ ) y el Análisis de Poblaciones Virtuales Aproximado ( $\hat{N}$ ) con los parámetros de la función  $\hat{\gamma}_M(F)$  correspondientes al dominio  $\Omega_8$  ( $0,35 \leq M < 0,40$ ;  $F \leq 2$ ).

Figure 3. Hoki (*Macruronus magellanicus*). Number of individuals per age for the Virtual Population Analysis ( $N$ ) and the Approximate Virtual Population Analysis ( $\hat{N}$ ) with the  $\hat{\gamma}_M(F)$  function parameters corresponding to the  $\Omega_8$  ( $0.35 \leq M < 0.40$ ;  $F \leq 2$ ) domain.

### Caballa (*Scomber japonicus*) considerando los parámetros $a_M$ , $b_M$ y $c_M$ de la Tabla 1 (dominio $\Omega_9$ )

En la Tabla 4 se presentan los resultados que surgen al considerar la cohorte correspondiente a 1971. En la Figura 4 se puede observar la estimación del número de individuos por edad (en millones de ejemplares), utilizando el APV y el APVA. Los cálculos para el método modificado se hicieron considerando la función  $\hat{\gamma}_M(F)$ , con los parámetros  $a_M$ ,  $b_M$  y  $c_M$  correspondientes al dominio  $\Omega_9$  (Tabla 1). La tasa de mortalidad natural utilizada fue  $M = 0,40$  (Perrota *et al.*, 1990).

### Caballa (*Scomber japonicus*) considerando los parámetros $a_M$ , $b_M$ y $c_M$ de la Tabla 2 (dominio $\Omega_3^*$ )

En la Tabla 5 se muestran los resultados para el método modificado considerando un valor único y fijo de  $M$ , con la estimación de los parámetros

$a_M$ ,  $b_M$  y  $c_M$  en el dominio  $\Omega_* = \{(0,4; F) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq F \leq 2\}$  ( $a_M$ ,  $b_M$  y  $c_M$  correspondientes al dominio  $\Omega_3^*$  Tabla 2).

### Anchoíta (*Engraulis anchoita*)

Los resultados que se muestran en la Tabla 6 son de la cohorte correspondiente a 1993. La Figura 5 muestra el número de individuos por edad (en millones), resultante del APV tradicional y el APVA considerando  $M = 1,02$ . Los errores obtenidos por ambos métodos son pequeños, en términos relativos, destacándose ante todo la poca diferencia entre ambos.

### Resultados de la simulación para la evaluación de velocidad de procesamiento del APVA en relación al APV

En la Tabla 7 se muestran los resultados de la simulación numérica en R, para evaluar los

Tabla 4. Comparación de los resultados del Análisis de Poblaciones Virtuales (APV) y del Análisis de Poblaciones Virtuales Aproximado (APVA). Caballa (*Scomber japonicus*). Clase anual 1971,  $M = 0,40$ . Las tasas de mortalidad por pesca y los errores están redondeados al cuarto decimal.

Table 4. Comparison of the results of the Virtual Population Analysis (APV) and the Approximate Virtual Population Analysis (APVA). Mackerel (*Scomber japonicus*). 1971 year class,  $M = 0.40$ . The fishing mortality rates and errors are rounded to the fourth decimal.

Edad	Mortalidad por pesca $F_i$			Número de individuos $N_i$		
	APV	APVA	Error relativo (%)	APV	APVA	Error relativo (%)
8	0,3700*	0,3700*		927.317	927.317	
7	0,0998	0,0988	-0,9934	1.528.505	1.526.991	-0,0991
6	0,1204	0,1194	-0,8849	2.572.126	2.566.841	-0,2057
5	0,0756	0,0750	-0,8172	4.138.609	4.127.554	-0,2675
4	0,0917	0,0910	-0,7471	6.766.865	6.744.168	-0,3360
3	0,2622	0,2607	-0,5904	13.121.713	13.057.477	-0,4908
2	0,3908	0,3892	-0,4194	28.936.821	28.747.981	-0,6547
1	0,1171	0,1166	-0,3678	48.529.972	48.192.513	-0,6978

\*Se asume.

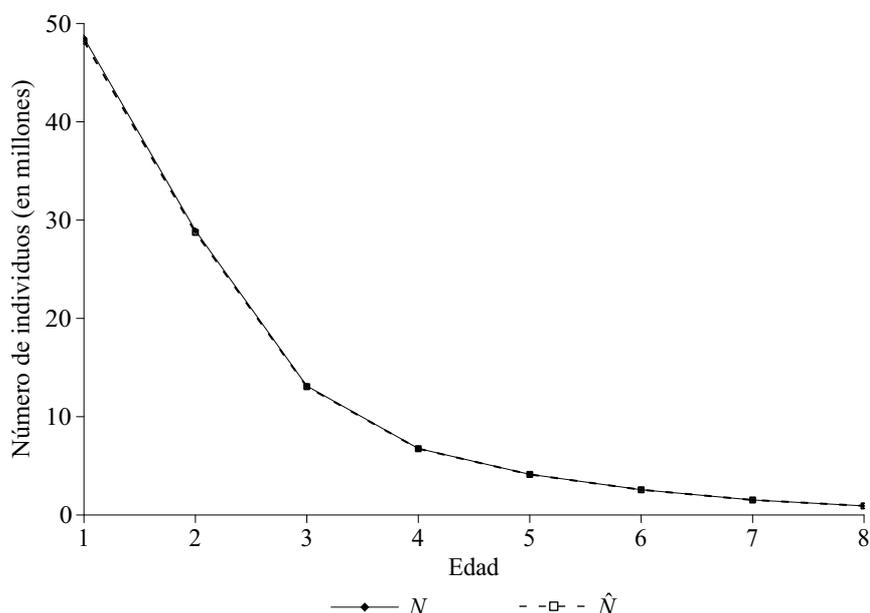


Figura 4. Caballa (*Scomber japonicus*). Número de individuos por edad para el Análisis de Poblaciones Virtuales ( $N$ ) y el Análisis de Poblaciones Virtuales Aproximado ( $\hat{N}$ ) con los parámetros de la función  $\hat{\gamma}_M(F)$  correspondientes al dominio  $\Omega_9$  ( $0,40 \leq M < 0,45$ ;  $F \leq 2$ ).

Figure 4. Mackerel (*Scomber japonicus*). Number of individuals per age for the Virtual Population Analysis ( $N$ ) and the Approximate Virtual Population Analysis ( $\hat{N}$ ) with the  $\hat{\gamma}_M(F)$  function parameters corresponding to the  $\Omega_9$  ( $0.40 \leq M < 0.45$ ;  $F \leq 2$ ) domain.

Tabla 5. Comparación de los resultados del Análisis de Poblaciones Virtuales (APV) y del Análisis de Poblaciones Virtuales Aproximado (APVA) cuando  $M$  es un valor único y fijo. Caballa (*Scomber japonicus*). Clase anual 1971,  $M = 0,40$ . Las tasas de mortalidad por pesca y los errores están redondeados al cuarto decimal.

Table 5. Comparison of the results of the Virtual Population Analysis (APV) and the Approximate Virtual Population Analysis (APVA) when  $M$  is set to a unique and fixed value. Mackerel (*Scomber japonicus*). 1971 year class,  $M = 0.40$ . The fishing mortality rates and errors are rounded to the fourth decimal.

Edad	Mortalidad por pesca $F_i$			Número de individuos $N_i$		
	APV	APVA	Error relativo (%)	APV	APVA	Error relativo (%)
8	0,3700*	0,3700*	927.317		927.317	
7	0,0998	0,0996	-0,1966	1.528.505	1.528.205	-0,0196
6	0,1204	0,1202	-0,1749	2.572.126	2.571.080	-0,0407
5	0,0756	0,0755	-0,1560	4.138.609	4.136.438	-0,0525
4	0,0917	0,0915	-0,1469	6.766.865	6.762.404	-0,0659
3	0,2622	0,2620	-0,0761	13.121.713	13.110.447	-0,0859
2	0,3908	0,3908	-0,0032	28.936.821	28.911.612	-0,0872
1	0,1171	0,1169	-0,1122	48.529.972	48.481.326	-0,1003

\*Se asume.

Tabla 6. Comparación de los resultados del Análisis de Poblaciones Virtuales (APV) y del Análisis de Poblaciones Virtuales Aproximado (APVA). Anchoíta (*Engraulis anchoita*) al norte de los 41° S. Clase anual 1993,  $M = 1,02$ . Las tasas de mortalidad por pesca y los errores están redondeados al cuarto decimal.

Table 6. Comparison of the results of the Virtual Population Analysis (APV) and the Approximate Virtual Population Analysis (APVA). Anchovy (*Engraulis anchoita*) north of 41° S. 1993 year class,  $M = 1.02$ . The fishing mortality rates and errors are rounded to the fourth decimal.

Edad	Mortalidad por pesca $F_i$			Número de individuos $N_i$		
	APV	APVA	Error relativo (%)	APV	APVA	Error relativo (%)
6	0,0079*	0,0079*		810.372.509	810.372.509	
5	0,0348	0,0347	-0,1219	2.326.851.195	2.326.752.537	-0,0042
4	0,0308	0,0308	-0,1172	6.654.885.197	6.654.362.493	-0,0079
3	0,0134	0,0134	-0,0872	18.703.871.148	18.702.183.799	-0,0090
2	0,0032	0,0032	0,0061	52.036.931.885	52.032.247.587	-0,0090
1	0,0002	0,0002	0,2385	144.334.070.386	144.321.138.482	-0,0090

\*Se asume.

tiempos de procesamiento del APVA y el APV. Se presentan también las tasas relativas del tiempo de procesamiento del APVA en relación al APV.

Como se puede observar en las Tablas 3, 4, 5 y 6, el APVA permite obtener un grado de aproximación al APV totalmente aceptable, con errores acotados y bajos en la estimación de la numerosidad

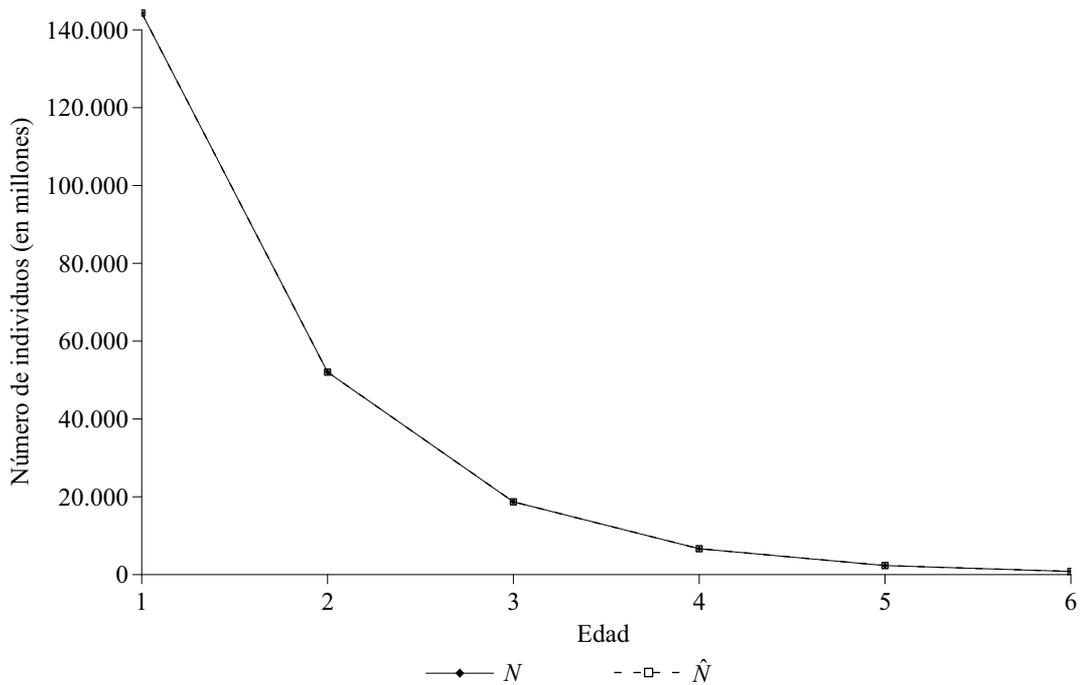


Figura 5. Anchoíta (*Engraulis anchoita*). Número de individuos por edad para el Análisis de Poblaciones Virtuales ( $N$ ) y el Análisis de Poblaciones Virtuales Aproximado ( $\hat{N}$ ) con los parámetros de la función  $\hat{\gamma}_M(F)$  correspondientes al dominio  $\Omega_{21}$  ( $1,00 \leq M < 1,05$ ;  $F \leq 2$ ).

Figure 5. Anchovy (*Engraulis anchoita*). Number of individuals per age for the Virtual Population Analysis ( $N$ ) and the Approximate Virtual Population Analysis ( $\hat{N}$ ) with the  $\hat{\gamma}_M(F)$  function parameters corresponding to the  $\Omega_{21}$  ( $1.00 \leq M < 1.05$ ;  $F \leq 2$ ) domain.

Tabla 7. Resultados de la simulación (1.000.000 de simulaciones) para evaluar los tiempos de procesamiento del Análisis de Poblaciones Virtuales Aproximado (APVA) en relación al Análisis de Poblaciones Virtuales (APV) en su implementación en R. Tiempos de procesamiento en segundos y tasas relativas APV/APVA.

Table 7. Simulation results (1,000,000 simulations) to evaluate the processing times of Approximate Virtual Population Analysis (APVA) in relation to Virtual Population Analysis (APV) in its implementation in R. Processing times in seconds and APV/APVA relative rates.

Especie	Tiempo de procesamiento (segundos)		Tasa relativa APV/APVA
	APV	APVA	
Merluza de cola	1.757,50	128,92	13,63
Caballa	1.135,05	84,02	13,51
Anchoíta	815,41	71,42	11,42

por edad y tasas instantáneas de mortalidad por pesca. Y además, en caso de ser implementado en R, permite reducir considerablemente los tiempos

de procesamiento, siendo éstos entre 12 y 14 veces inferiores a los tiempos de procesamiento requeridos para una implementación del APV en R.

---

## CONCLUSIONES

---

Al considerar la función  $\hat{\gamma}_M(\cdot)$  se obtienen soluciones explícitas, dadas por (6), para las tasas instantáneas de mortalidad por pesca sin ningún tipo de indeterminación matemática. Y además, el error relativo en las numerosidades por edad tiene un comportamiento matemático consistente ya que el mismo tiende a cero cuando el error relativo en las tasas instantáneas de mortalidad por pesca tiende a cero.

El dominio de valores de  $M$  y  $F$  de aplicación del APVA extiende cuatro veces el intervalo de variación de  $M$  y 1,7 veces el intervalo de variación de  $F$  ( $0 \leq M < 1,2$  y  $0 \leq F \leq 2$ ) con respecto al dominio de aplicación del Análisis de Cohortes de Pope ( $0 \leq M < 0,3$  y  $0 \leq F < 1,2$ ).

De acuerdo con los resultados obtenidos en este trabajo se puede ver que los errores de aproximación del APVA, tomando como referencia el APV son totalmente satisfactorios. Determinando un error relativo máximo en valor absoluto, en la estimación de las tasas instantáneas de mortalidad por pesca, menor o igual a 1,32% y un error relativo medio en valor absoluto menor o igual a 0,50%. Si bien como se observa en las Tablas 1 y 2 el error relativo medio crece a medida que se incrementa  $M$ , aun en éstos casos el ajuste es absolutamente satisfactorio.

El APVA no genera ninguna complicación adicional en el proceso de reconstrucción de cada cohorte, pudiéndose además efectuar los cálculos sin necesidad de resolver ninguna ecuación no lineal.

En caso que en el proceso de cálculo  $M$  varíe (por ejemplo, cuando se efectúan proyecciones y análisis de riesgo o en una evaluación bajo el paradigma bayesiano), el usuario puede operar en el dominio completo ( $0 \leq M < 1,2$  y  $0 \leq F \leq 2$ ), considerando el dominio que le corresponda a cada valor de  $M$  utilizado en el proceso numérico implementado.

Por otra parte, en caso de que el valor de  $M$  sea fijo y conocido, a lo largo del proceso implementado para la evaluación del recurso bajo consideración, el usuario del método puede utilizar los valores de los parámetros  $a_M$ ,  $b_M$  y  $c_M$  dados en la Tabla 1, considerando el dominio que corresponda al valor de  $M$  fijo disponible. También puede calcular sus propios valores de los parámetros  $a_M$ ,  $b_M$  y  $c_M$ , considerando un nuevo dominio con la tasa instantánea de mortalidad natural  $M$  fija y con el intervalo de variación que le corresponda en su aplicación específica a la tasa instantánea de mortalidad por pesca.

En la implementación en R, el tiempo de procesamiento del APVA fue de 12 a 14 veces inferior a la correspondiente implementación del APV, en los ejemplos considerados.

---

## AGRADECIMIENTOS

---

Agradecemos las observaciones del Dr. Aníbal Aubone, Jefe del Gabinete de Biomatemática, que permitieron mejorar el manuscrito original.

---

## BIBLIOGRAFÍA

---

- CAROZZA, C., LORENZO, M.I., RODRIGUEZ, J.S. & SARAVIA, M. 2014. Estimación de la Captura Máxima Biológicamente Aceptable de corvina rubia (*Micropogonias furnieri*) mediante un modelo estructurado (ASPM) para aguas del Río de la Plata, ZCP y adyacentes al norte de los 39°S. Año 2014. Inf. Téc. Of. INIDEP N° 14/2014, 25 pp.
- CORDO, H.D. 2014. Evaluación del estado actual del recurso de abadejo (*Genypterus blacodes*) y estimación de la captura biológicamente aceptable en el año 2014 y en el largo plazo. Inf. Téc. Of. INIDEP N° 13/2014, 36 pp.
- GIUSI, A.R., ZAVATTERI, A. & DI MARCO, E.J.

- 2015 a. Evaluación de la abundancia de polaca (*Micromesistius australis*) en el Atlántico Sudoccidental. Período 1987-2014. Inf. Téc. Of. INIDEP N° 30/2015, 17 pp.
- GIUSSI, A.R., DI MARCO, E.J., ZAVATTERI, A. & WÖHLER, O.C. 2015 b. Evaluación de la abundancia de merluza de cola (*Macruronus magellanicus*) del Atlántico Sudoccidental. Período 1985-2014. Inf. Téc. Of. INIDEP N° 28/2015, 22 pp.
- GULLAND, J.A. 1965. Estimation of mortality rates. Annex to Artic Fisheries Working Group (meeting in Hamburg, January 1965). ICES, CM 1965, Doc. No. 3 (mimeograph).
- HANSEN, J.E. 2011. Parámetros biológicos relevantes para las pesquerías de anchoíta argentina (*Engraulis anchoita*). Estimaciones resultantes de reunir datos de campañas de investigación (1993 a 2008) y de muestras de capturas comerciales (1986 a 2009). Inf. Téc. Of. INIDEP N° 83/2011, 24 pp.
- HANSEN, J.E., GARCARENNA, A.D. & BURATTI, C.C. 2009. Estimación de la abundancia de la población de anchoíta bonaerense durante el período 1990-2008 y de una captura biológicamente aceptable en el año 2009. Inf. Téc. Of. INIDEP N° 12/2009, 22 pp.
- HERNÁNDEZ, D.R. & PERROTTA, R.G. 2008. Modificación del análisis de cohortes de Pope para extender su aplicación a un rango más amplio de valores de mortalidad natural y mortalidad por pesca. Rev. Invest. Desarr. Pesq., 19: 23-36.
- IRUSTA, C.G. 2015. Evaluación del estado del efectivo norte de 41°S de la merluza (*Merluccius hubbsi*) y estimación de la captura biológicamente aceptable para el año 2016. Inf. Téc. Of. INIDEP N° 20/2015, 33 pp.
- OSTLE, B. 1979. Estadística Aplicada. Técnicas de la estadística moderna, cuándo y dónde aplicarlas. Editorial Limusa, México, 629 pp.
- PERROTTA, R.G., FORCINTINI, L., COUSSEAU, M.B. & HANSEN, J.E. 1990. Caballa (*Scomber japonicus*). Parte 1. Cálculo de los parámetros de crecimiento, estimación de tasas de Mortalidad y análisis de otros aspectos biológicos del efectivo marplatense. En: COUSSEAU, M.B. (Ed.). Muestreo bioestadístico de desembarque del puerto de Mar del Plata. Período 1980-1985. Contrib. Inst. Nac. Invest. Desarr. Pesq. (Mar del Plata), N° 585: 43-82.
- POPE, J.G. 1972. Investigation of the Accuracy of Virtual Population Analysis Using Cohort Analysis. ICNAF Research Bulletin, 9: 65-74.
- R CORE TEAM. 2016. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>.
- WÖHLER, O.C., GIUSSI, A.R., & HANSEN, J.E. 1999. Análisis secuencial de la población de merluza de cola (*Macruronus magellanicus*) en el Atlántico Sudoccidental. Período 1985-1995. Rev. Invest. Desarr. Pesq., 12: 27-43.

Recibido: 08-11-2016

Aceptado: 29-09-2017

